

24/04/2017

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \mathcal{P}_n[X] \times \mathcal{P}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, \langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \langle A, B \rangle = \text{Tr}(B^T A)$$

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ. Ορίζουμε

$$\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}, \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \text{ μινος διασπορευτος } v.$$

Παραδείγματα

Για $n=2$ ή 3 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ $\|v\|$ - μινος της $v \in \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ γιατί

π.χ.

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Αν $u, v \in V$ ορίζουμε ΑΠΟΣΤΑΣΗ: $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$

Αυτή η έννοια γενικεύει τη συνήδη έννοια της απόστασης στο $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$

Πρώτο, ισχύει $d(u, v) \geq 0$ και $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$

Επίσης, ισχύει η τριγωνική ανισότητα

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) \text{ για κάθε } u, v, w \in V.$$

Ορισμός

Λέμε $u, w \in V$ κάθετα αν $\langle u, w \rangle = 0_{\mathbb{R}}$

Στο $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ είναι η συνήθης έννοια καθετότητας

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

Έστω $u, w \in (V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ εσωτερικό γινόμενο.

Τότε $|\langle u, w \rangle| \leq \|u\| \|w\|$

Απόδειξη

Αν $w = 0_V$ $\langle u, w \rangle = 0_{\mathbb{R}}$, $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle} = 0_{\mathbb{R}}$ και ισχύει.

Υποθέτουμε $w \neq 0_V$. Θέτουμε $z = u - \frac{\langle u, w \rangle}{\|w\|^2} w$ (Παρατηρούμε z κάθετο στο w)

Τότε $0 \leq \langle z, z \rangle = \langle u - \frac{\langle u, w \rangle}{\|w\|^2} w, u - \frac{\langle u, w \rangle}{\|w\|^2} w \rangle =$

$$= \langle u, u \rangle - \frac{\langle u, w \rangle \langle u, w \rangle}{\|w\|^2} - \frac{\langle u, w \rangle}{\|w\|^2} \langle w, u \rangle + \frac{\langle u, w \rangle^2}{\|w\|^2 \|w\|^2} \langle w, w \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - \frac{\langle u, w \rangle^2}{\|w\|^2} = \frac{\|u\|^2 \|w\|^2 - \langle u, w \rangle^2}{\|w\|^2}$$

Το αποτέλεσμα έπεται.

Υπόθεση: $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(\theta) = \cos \theta$
Είναι 1-1 και επί.

Ορισμός

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρο εσωτερικού γινομένου και $u, v \in V$ μη μηδενικά.

Από ανισότητα Cauchy-Schwarz $-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \leq 1$

Αρα, υπάρχει μοναδικό $\theta \in [0, \pi]$ με $\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$

Λέμε ότι το θ είναι "η γωνία" των u, v .

Παρατήρηση: u, w κάθετα $\Leftrightarrow \langle u, w \rangle = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Παράδειγμα Έστω $\mathbb{R}^3$ με το συνθετικό Ευκλείδειο γινόμενο.
Να βρεθεί η γωνία των $u = (0, 5, 0)$, $w = (3, 3, 0)$
Λύση

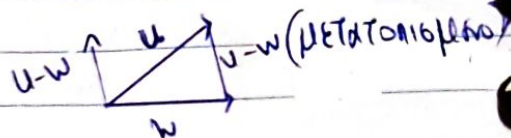
$$\begin{aligned} \text{Έστω } \theta \in [0, \pi] \text{ η γωνία. Τότε } \cos \theta &= \frac{\langle u, w \rangle}{\|u\| \|w\|} = \frac{15}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{39}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \theta = \frac{\pi}{4}$$

Τριγωνική Ανισότητα

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ και $u, w \in V$. Τότε
 $\|u+w\| \leq \|u\| + \|w\|$.

Παρατήρηση: Για w παίρνουμε $\|u-w\| \leq \|u\| + \|w\|$
που είναι η συνήθης τριγωνική ανισότητα.



Απόδειξη

$$\|u+w\|^2 = \langle u+w, u+w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle u, w \rangle$$

$$= \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle u, w \rangle \leq \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle u, w \rangle|$$

Από το

Cauchy-Schwarz

$$\leq \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2\|u\|\|w\| = (\|u\| + \|w\|)^2$$

Το αποτέλεσμα έπεται

Πρόταση (Πυθαγόρειο Δείγμα, Δευτή μορφή)

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. και $u, w \in V$.

Τ.Α.Ε.Ι.

$$i) \|u+w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$$

ii) u, w κάθετα

(Για $-w$ ii) $\Rightarrow$ i) είναι το σύνθετο Πυθαγόρειο Δείγμα

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\|u+w\|^2 &= \langle u+w, u+w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle u, w \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle u, w \rangle\end{aligned}$$

Αρα, το αποτέλεσμα έπεται

ΚΛΗΡΟΝΟΜΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. και W (γραμμικός) υποχώρος τού V .
Θέτουμε $\langle \cdot, \cdot \rangle_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ με $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle \in \mathbb{R}$
Τότε $\langle \cdot, \cdot \rangle$ εσωτερικό γινόμενο στο W .

Απόδειξη Αμεση.

Ορισμός

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. και $e = (e_1, \dots, e_n)$ βάση τού V .

Η e λέγεται ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ βάση αν $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ για $i \neq j$
και $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ (δηλαδή $\|e_i\| = 1$) για κάθε i .

Παράδειγμα 1.

Στο $\mathbb{R}^n$ με το σύνθετο εσωτερικό γινόμενο, η κανονική βάση $e = e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ είναι ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ γιατί $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ για $i \neq j$ και $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ για κάθε i .

Ερώτημα: Στο $\mathbb{R}_3[X]$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$
είναι η κανονική βάση $e = (e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, e_4 = x^3)$ ορθοκανονική;
Είναι $\langle e_1, e_2 \rangle = \int_0^1 1 \cdot x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0$. Αρα δεν είναι ορθοκανονική.

Αλγόριθμος (Gram-Schmidt)

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. και $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ βάση του V
Ο Αλγόριθμος κατασκευάζει ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΗ
 $e = (e_1, \dots, e_n)$ του V

Βήμα 1^ο : κατασκευάζουμε αναδρομική συνθήκη βάση
 $h = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ του V με την ιδιότητα
 $\langle h_i, h_j \rangle = 0$ για $i \neq j$

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Θέτουμε (εμφυτωμένα) $h_1 = g_1$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1$$

$$h_3 = g_3 - \frac{\langle g_3, h_2 \rangle}{\langle h_2, h_2 \rangle} h_2 - \frac{\langle g_3, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1$$

$$h_p = g_p - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\langle g_p, h_i \rangle}{\langle h_i, h_i \rangle} h_i \quad \text{για } p \text{ μέχρι } n$$

Τότε ισχύουν

- 1) $h_i \neq 0$ για κάθε i
- 2) $\langle h_i, h_j \rangle = 0$ για $i \neq j$
- 3) Για κάθε p με $1 \leq p \leq n$, $\langle g_1, \dots, g_p \rangle = \langle h_1, \dots, h_p \rangle$
- 4) $h_1, \dots, h_n$ βάση του V .

Βήμα 2^ο : Θέτουμε $e_i = \frac{h_i}{\|h_i\|}$ για $i = 1, 2, \dots, n$.

Τότε $e = (e_1, \dots, e_n)$ ορθοκανονική βάση του V .

Παράδειγμα

Εφαρμόζουμε διαδικασία Gram-Schmidt στη βάση
 $g = \{g_1 = (1, 1, 0), g_2 = (2, 0, 1), g_3 = (2, 2, 1)\}$ του $\mathbb{R}^3$ με το
 συνδυαστικό εσωτερικό γινόμενο.

Έχουμε $h_1 = g_1 = (1, 1, 0)$

$$h_2 = g_2 - \frac{\langle g_2, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1 = (2, 0, 1) - \frac{2}{2} (1, 1, 0) = (1, -1, 1)$$

$$h_3 = g_3 - \frac{\langle g_3, h_1 \rangle}{\langle h_1, h_1 \rangle} h_1 - \frac{\langle g_3, h_2 \rangle}{\langle h_2, h_2 \rangle} h_2 =$$

$$= (2, 2, 1) - \frac{4}{2} (1, 1, 0) - \frac{1}{3} (1, -1, 1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Επομένως, έχουμε

$$e_i = \frac{h_i}{\|h_i\|}, \text{ για } i=1, 2, 3 \text{ έχουμε } e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \text{ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΗ του } \mathbb{R}^3$$

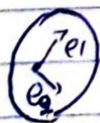
Ερώτημα: Έστω $V = \mathbb{R}^n$ με συνδυαστικό εσωτερικό γινόμενο και
 $e_1 \in V$. Πότε είναι το e_1 βάση του V ;

Αν και μόνο αν $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$

Πότε είναι το e_1 ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΗ του V ;

Πρέπει $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$. Άρα $e_1 = 1$ ή $e_1 = -1$.

Ερώτημα: Έστω $\mathbb{R}^2$ με το συνδυαστικό εσωτερικό γινόμενο και
 $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ μη μηδενικά. Πότε είναι βάση του $\mathbb{R}^2$;
 Είναι βάση αν και μόνο αν δεν είναι συγγραμμικά



Πότε είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$;

Πρέπει $e_1 \perp e_2$ και $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$

Εφαρμόζουμε το e_1 ως παραλληλόγραμμο τότε για το
 e_2 έχουμε 2 μήκη

Συμπέρασμα: υπάρχουν δύο μόνο ορθοκανονικές βάσεις

παραλληλό-
 γرامμο $\Rightarrow$

